УДК 515.126.83 DOI 10.47438/2309-7078_2021_3_181

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ИЗМЕРИМЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Валерий Владимирович Обуховский[1], Екатерина Николаевна Гетманова[2], Сергей Викторович Корнев[3]

Воронежский государственный педагогический университет[1, 2, 3]
Воронеж, Россия

[1]*Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики,*
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
[2]*Аспирант кафедры высшей математики,*
e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
[3]*Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,*
e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Аннотация: В работе описываются различные свойства измеримых и случайных многозначных отображений. Вводится понятие случайной точки совпадения однозначного и многозначного отображений и доказывается теорема о ее существовании. Устанавливается измеримость многозначного оператора суперпозиции, порожденного случайным многозначным отображением.

Ключевые слова: σ-алгебра, измеримое пространство, измеримое многозначное отображение, случайная неподвижная точка, случайная точка совпадения, многозначный оператор суперпозиции, случайное дифференциальное включение.

Для цитирования: *Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Корнев С. В.* О некоторых классах измеримых многозначных отображений // Известия Воронежского государственного педагогического университета. 2021. № 3. С. 181–186. DOI 10.47438/2309-7078_2021_3_181

Введение

В последние десятилетия при моделировании стохастических воздействий на динамические системы широко применяется метод введения случайного параметра (см., например, [2; 5; 6; 8–14; 16; 17]). В настоящей работе описывается ряд свойств измеримых многозначных отображений, связанных с этим методом, вводятся понятия случайного многозначного отображения, случайной неподвижной точки, случайной точки совпадения. Доказывается теорема о существовании случайной точки совпадения многозначного и однозначного отображений. Устанавливается измеримость многозначного оператора суперпозиции, порожденного случайным многозначным отображением.

Результаты

1. Измеримые пространства и σ-алгебры

Напомним некоторые известные понятия (см., например, [4; 8]).

Рассмотрим пару (Ω, Σ), где Ω – множество произвольной природы, Σ – совокупность подмножеств множества Ω. Такая совокупность называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in \Sigma$;

2) если множество $A \in \Sigma$, то его дополнение $CA \in \Sigma$;

3) если некоторая, не более чем счетная последовательность $A_i \in \Sigma$, $i = 1,2,\dots$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Нетрудно видеть, что из определения вытекают следующие утверждения:

i) $\emptyset \in \Sigma$;

ii) для любой не более чем счетной последовательности $A_i \in \Sigma$, $i = 1,2,\dots$, имеем $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

В этом случае пара (Ω, Σ) – называется измеримым пространством, а элементы σ-алгебры Σ называются измеримыми подмножествами.

Рассмотрим некоторые примеры измеримых пространств и σ-алгебр.

1. Пусть Ω – произвольное множество, $\Sigma = 2^{\Omega}$ – совокупность всех подмножеств множества Ω.

2. Рассмотрим метрическое пространство X. Множества, которые могут быть получены из открытых и замкнутых подмножеств X путем операций объединения и пересечения, повторенных в любом порядке конечное или счетное число раз, называются борелевскими. Их совокупность образует σ-алгебру $\mathbb{B}(X)$ борелевских подмножеств X.

3. Множество Ω может интерпретироваться как пространство элементарных исходов данного испытания. Тогда любая σ-алгебра Σ на Ω в теории вероятностей рассматривается как множество случайных событий. Обычно на этом множестве задается вероятностная мера μ, т.е. неотрицательная счетно-аддитивная функция такая, что $\mu(\Omega) = 1$.

Значение $\mu(A)$ для $A \in \Sigma$ понимается как вероятность события A.

4. Пусть $\Omega = [a,b]$ – некоторый ограниченный отрезок числовой прямой. В качестве Σ можно рассмотреть σ-алгебру $\mathcal{L}(\Omega)$ подмножеств, измеримых по Лебегу.

2. Измеримые многозначные отображения

Рассмотрим сначала классическое определение измеримости отображения.

Определение 1. Пусть (Ω,Σ) – измеримое пространство, X – сепарабельное метрическое пространство. Отображение $f: \Omega \to X$ называется измеримым, если для любого открытого $V \subset X$, его прообраз $f^{-1}(V) = \{\omega \in \Omega: f(\omega) \in V\}$ измерим, т.е. принадлежит Σ.

В случае, когда f – числовая функция ($X = \mathbb{R}$) условие измеримости f может быть записано в виде предположения измеримости множества $\{\omega \in \Omega: f(\omega) < r\}$ для любого $r \in \mathbb{R}$.

Распространим понятие измеримости на многозначные отображения (см., например, [1], [4], [6], [8]). Символом $C(X)$ будем обозначать совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства X. Совокупность всех непустых подмножеств X обозначим $P(X)$.

Определение 2. Многозначное отображение (мультиотображение) $\Phi: \Omega \to C(X)$ называется измеримым, если для любого открытого множества $V \subset X$ его малый прообраз

$$\Phi_+^{-1}(\mathrm{V}) = \{\omega \in \Omega: \Phi(\omega) \subset \mathrm{V}\}$$

измерим.

Равносильным, очевидно, является следующее определение.

Определение 3. Мультиотображение $\Phi: \Omega \to C(X)$ измеримо, если для любого замкнутого множества $W \subset X$ его полный прообраз

$$\Phi_-^{-1}(W) = \{\omega \in \Omega: \Phi(\omega) \cap \mathrm{W} = \emptyset\}$$

измерим.

Более того, равносильное определение можно получить, если потребовать измеримость малого прообраза любого замкнутого множества или полного прообраза любого открытого множества.

Замечание 1. Для однозначного отображения понятия малого и полного прообраза множества совпадают с понятием обычного прообраза множества, поэтому определение измеримости мультиотображения является прямым обобщением измеримости однозначного отображения.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. ([7]) Мультиотображение $\Phi: \Omega \to C(X)$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ числовая функция $\psi_x: \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\psi_x(\omega) = d_X\big(x, \Phi(\omega)\big) := \inf\{d_X(x,y) \ : y \in \Phi(\omega)\}$$

измерима.

Данное утверждение вытекает из очевидного для любого положительного $r \in \mathbb{R}$ и открытого шара $B_r(x)$ с центром в точке $x \in X$ радиуса r равенства

$$\big\{\omega: d_X\big(\omega, \Phi(\omega)\big) < r\big\} = \Phi_-^{-1}\big(B_r(x)\big)$$

и свойств полного прообраза мультиотображения (см. [1]). Кроме того, в силу сепарабельности пространства X в Лемме 1 можно требовать измеримость функций ψ_x лишь для x принадлежащих некоторому счетному плотному подмножеству X.

Пусть теперь задано измеримое пространство (Ω,Σ) и сепарабельные метрические пространства X и Y. Пусть $\mathbb{B}(X)$ – σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства X и $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества вида $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in B(X)$.

Определение 4. Мультиотображение $\Phi: \Omega \times X \to C(Y)$ будем называть случайным, если оно измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$.

Для того, чтобы привести пример случайного мультиотображения, напомним следующие понятия (см., например, [1], [6], [8]).

Определение 5. Мультиотображение $\Phi: X \to C(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.), если малый прообраз $\Phi_+^{-1}(\mathrm{V})$ любого открытого подмножества $V \subset Y$ открыт в X. Если малый прообраз $\Phi_+^{-1}(W)$ любого замкнутого подмножества $W \subset Y$ замкнут в X, то Φ называется полунепрерывным снизу (пн.сн.). Если мультиотображение Φ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

Ясно, что в случае однозначного отображения все эти понятия совпадают с обычной непрерывностью.

Справедливо следующее утверждение (см. [8], Proposition 7.9).

Лемма 2. Пусть $\Phi: \Omega \times X \to C(Y)$ – мультиотображение типа Каратеодори, т.е.

1) для любого $x \in X$ мультиотображение $\Phi(\cdot,x): \Omega \to C(Y)$ – измеримо относительно σ-алгебры Σ;

2) для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\Phi(\omega,\cdot): X \to C(Y)$ непрерывно.

Тогда мультиотображение Φ является случайным.

Рассмотрим еще ряд важных свойств измеримых многозначных отображений.

Лемма 3. ([5]) Пусть (Ω,Σ) – измеримое пространство, X – полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\Phi: \Omega \to C(X)$ – измеримое мультиотображение, $\phi: \Omega \to X$ – измеримое отображение. Тогда функция $\kappa: \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\kappa(\omega) = d_X\big(\phi(\omega), \Phi(\omega)\big)$$

измерима.

Важную роль в теории измеримых многозначных отображений играет следующая классическая теорема Куратовского – Рылль-Нардзевского ([15]) о сечении.

Лемма 4. Пусть (Ω,Σ) – измеримое пространство, X – полное сепарабельное метрическое пространство. Всякое измеримое мультиотображение $\Phi: \Omega \to C(X)$ имеет измеримое сечение, т.е. найдется измеримое отображение $\phi: \Omega \to X$ такое, что $\phi(\omega) \in \Phi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Отметим важное уточнение этого результата (см. [16]).

Лемма 5. Пусть X – сепарабельное банахово пространство; мультифункция $\Phi: [\mathrm{a,b}] \to C(\mathrm{X})$: i) измерима по Лебегу, т.е. измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{L}([a,b])$ лебеговых подмножеств $[a,b]$ и ii) интегрально ограничена, т.е. существует интегрируемая функция $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ такая, что

$$||\Phi(t)|| := \sup\{||\phi||\colon \phi\in\Phi(t)\}\le\gamma(t)\ \text{п.в.}\ t\in[a,b].$$

Тогда множество S^1_Φ всех интегрируемых по Бохнеру сечений Φ непусто и, более того, для любой интегрируемой функции $v\colon[a,b]\to X$ выполнены следующие соотношения:

$$dist_{L_1}(v,S^1_\Phi)=\inf\{dist_{L_1}(v,s)\colon s\in S^1_\Phi\}=$$
$$=\inf\left\{\int_a^b||v(t)-s(t)||\,dt : s\in S^1_\Phi\right\}$$
$$=\int_a^b d_X\big(v(t),\Phi(t)\big)\,dt.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее понятие (см., например, [8]).

Пусть (Ω,Σ,μ) – пространство с мерой (т.е. измеримое пространство с заданной на Σ счетно-аддитивной функцией h). Мера μ называется полной, если для любого $A\in\Sigma$ с $\mu(A)=0$ для каждого $B\subset A$ имеем $B\in\Sigma$ и, следовательно, $\mu(B)=0$. Наименьшее расширение (Ω,Σ_0,μ_0) пространства (Ω,Σ,μ), при котором мера μ_0 полна, называется его μ-пополнением.

Пусть теперь (Ω,Σ) – измеримое пространство и для каждой вероятностной меры μ на (Ω,Σ) (т.е. $\mu(\Omega)=1$ обозначается $\mu\in M^1_+(\Omega)$), пусть Σ_μ – μ-пополнение Σ. Обозначим

$$\hat{\Sigma}=\bigcap_{\mu\in M^1_+(\Omega)}\Sigma_\mu.$$

Измеримое пространство (Ω,Σ) называется полным, если $\Sigma=\hat{\Sigma}$.

Развитием теоремы Куратовского – Рылль-Нардзевского является следующая теорема Аумана ([3]) об измеримом сечении.

Лемма 6. Пусть (Ω,Σ) – полное измеримое пространство, X – полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть мультиотображение $\Phi\colon\Omega\to P(X)$ таково, что его график $\Gamma_\Phi=\{(\omega,x)\in\Omega\times X\colon x\in\Phi(\omega)\}$ измерим в том смысле, что он принадлежит $\Sigma\times\mathbb{B}(X)$. Тогда Φ имеет измеримое сечение.

В случае, когда (Ω,Σ) – полное измеримое пространство, тот факт, что это утверждение является обобщением теоремы Куратовского – Рылль-Нардзевского, достаточно очевиден. В самом деле, пусть мультиотображение $\Phi\colon\Omega\to C(X)$ измеримо. Рассмотрим функцию $\gamma\colon\Omega\times X\to\mathbb{R}$; $\gamma(\omega,x)=d_X\big(x,\Phi(\omega)\big)$. Применяя Лемму 3, получаем, что функция γ является функцией типа Каратеодори, и, следовательно, согласно Лемме 2, она является случайной. Но тогда $\Gamma_\Phi=\gamma^{-1}(0)\in\Sigma\times\mathbb{B}(X)$.

3. Случайные неподвижные точки и случайные точки совпадения

Пусть (Ω,Σ) – измеримое пространство, X – сепарабельное метрическое пространство.

Определение 6. Измеримое отображение $\xi\colon\Omega\to X$ называется случайной неподвижной точкой мультиотображения $\Phi\colon\Omega\times X\to C(X)$, если

$$\xi(\omega)\in\Phi\big(\omega,\xi(\omega)\big)$$

для всех $\omega\in\Omega$.

Прямым развитием этого понятия является понятие случайной точки совпадения.

Определение 7. Пусть X, Y – сепарабельные метрические пространства. Пусть заданы мультиотображение $\Phi\colon\Omega\times X\to C(Y)$ и отображение $f\colon X\to Y$. Измеримая функция $\xi\colon\Omega\to X$, удовлетворяющая при каждом $\omega\in\Omega$ следующему соотношению

$$f\big(\xi(\omega)\big)\in\Phi\big(\omega,\xi(\omega)\big)$$

называется случайной точкой совпадения Φ и f.

Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему о случайной неподвижной точке (см. [2; 6]).

Теорема 1. Пусть (Ω,Σ) – полное измеримое пространство, X,Y – полные сепарабельные метрические пространства, Пусть $\Phi\colon\Omega\times X\to C(Y)$ – случайное мультиотображение; отображение $f\colon X\to Y$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathbb{B}(X)$ и для каждого $\omega\in\Omega$ множество точек совпадения отображений Φ и f

$$Coin_\omega(f,\Phi)=\{x\in X\colon f(x)\in\Phi(\omega,x)\}$$

непусто. Тогда Φ и f имеют случайную точку совпадения.

Доказательство. Измеримое отображение $f\colon X\to Y$ можно считать естественно продолженным до случайного отображения $\tilde{f}\colon\Omega\times X\to Y$, если положить $\tilde{f}(\omega,x)=f(x)$ для всех $\omega\in\Omega$. Действительно, для любого открытого множества $V\subset Y$ тогда имеем $\tilde{f}^{-1}(V)=\Omega\times f^{-1}(V)\in\Sigma\otimes\mathbb{B}(X)$.

Применяя Лемму 3, получим, что числовая функция $\mu\colon\Omega\times X\to\mathbb{R}$,

$$\mu(\omega,x)=d_Y\big(f(x),\Phi(\omega,x)\big)=d_Y\left(\tilde{f}(\omega,x),\Phi(\omega,x)\right)$$

является случайной. Определим мультиотображение $\mathcal{F}\colon\Omega\to P(X)$ как

$$\mathcal{F}(\omega)=Coin_\omega(f,\Phi).$$

Но тогда $\Gamma_{\mathcal{F}}=\mu^{-1}(0)\in\Sigma\times\mathbb{B}(X)$.

Применяя к мультиотображению $\mathcal{F}$ Лемму 6, получаем, что оно обладает измеримым сечением $\xi\colon\Omega\to X$, которое и является искомой случайной точкой совпадения.

Ясно, что полагая в данном утверждении $X=Y$ и f – тождественное отображение пространства X, мы получим теорему о существовании случайной неподвижной точки мультиотображения Φ.

В качестве примера рассмотрим случайную версию теоремы Какутани – Боненбласта – Карлина о неподвижной точке (см., например, [1], [6], [8]).

Определение 8. Случайное мультиотображение $\Phi\colon\Omega\times X\to C(Y)$ называется u-случайным мультиотображением, если для каждого $\omega\in\Omega$ мультиотображение $\Phi(\omega,\cdot)\colon X\to C(Y)$ полунепрерывно сверху.

Пусть M – выпуклое компактное подмножество банахова пространства; $Kv(M)$ обозначает совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств M.

Теорема 2. Пусть (Ω,Σ) – полное измеримое пространство. Тогда каждое u-случайное мультиотображение $\Phi\colon\Omega\times M\to Kv(M)$ имеет случайную неподвижную точку.

4. Измеримость случайного мультиоператора суперпозиции

Пусть (Ω,Σ) – измеримое пространство; X – сепарабельное банахово пространство; $Kv(X)$ обозначает совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств X. Рассмотрим мультиотображение $F\colon\Omega\times[0,T]\times X\to Kv(X)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) F – случайное мультиотображение, т.е. оно измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{L} \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\mathcal{L}$ – σ-алгебра лебеговых подмножеств $[0, T]$;

2) мультиотображение F полунепрерывно сверху по третьему аргументу:
для любых $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ мультиотображение

$$F(\omega, t, \cdot) : X \to Kv(X)$$

пн.св.;

3) существует функция $\mu: \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}_+$ такая, что: (i) для любого $\omega \in \Omega$ функция $\mu(\omega, \cdot): [0, T] \to R_+$ интегрируема по Лебегу, (ii) для п.в. $t \in [0, T]$ функция $\mu(\cdot, t): \Omega \to \mathbb{R}_+$ измерима, для которой при любых $(\omega, x) \in \Omega \times X$ выполнено

$||F(\omega, t, x)|| := \sup\{||f|| : f \in F(\omega, t, x)\} \leq \mu(\omega, t)(1 + ||x||)$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Отметим, что из условия (1) вытекает, что при фиксированных $(\omega, x) \in \Omega \times X$ мультифункция

$$F(\omega, \cdot, x): [0, T] \to Kv(X)$$

измерима по Лебегу.

Известно (см., например, [1]), что из данных условий вытекает, что при любом $\omega \in \Omega$ определен многозначный оператор суперпозиции $\mathcal{P}(\omega, \cdot): C([0, T], X) \to P(L^1([0, T]: X))$, заданный как

$$\mathcal{P}(\omega, x) = \{f \in L^1([0, T]; X): f(t) \in F(\omega, t, x(t)) \text{ п. в. } t \in [0, T]\},$$

где $L^1([0, T]: X)$ обозначает пространство интегрируемых по Бохнеру функций.

Теорема 3. Мультиотображение $\mathcal{P}: \Omega \times C([0, T], X) \to P(L^1([0, T]; X))$ является случайным.

Доказательство. Определим мультиоператор $\tilde{F}: \Omega \times [0, T] \times C([0, T]; X) \to Kv(X)$,

$$\tilde{F}(\omega, t, x) = F(\omega, t, x(t)).$$

Ясно, что $\tilde{F}$ можно представить как композицию

$$\tilde{F} = F \circ \theta,$$

где непрерывное отображение $\theta: \Omega \times [0, T] \times C([0, T]; X) \to \Omega \times [0, T] \times X$ определено как

$$\theta(\omega, t, x) = (\omega, t, x(t)).$$

Покажем, что $\tilde{F}$ – случайное мультиотображение. Действительно, пусть $V \subset X$ – открытое множество. Тогда $F_-^{-1}(V)$ – элемент σ-алгебры, порожденной множествами вида $A \times B \times C$, где A – измеримое подмножество Ω, B – лебегово измеримое подмножество промежутка [0,T], C – открытое подмножество X.

Достаточно показать, что $\theta^{-1}(A \times B \times C)$ – измеримо в $\Omega \times [0, T] \times C([0, T]; X)$. Рассмотрим непрерывное отображение $\theta': [0, T] \times C([0, T]; X) \to X$, определенное как

$$\theta'(t, x) = x(t).$$

Отметим, что $(\theta')^{-1}(C)$ является открытым подмножеством в $[0, T] \times C([0, T]; X)$, которое можно представить как объединение

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, t_i + \Delta_i) \times D_i, \text{где } D_i \in C([0, T]; X) \text{ –}$$

открытые подмножества.

Но тогда $\theta^{-1}(A \times B \times C)$ может быть представлено как

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A \times ((t_i, t_i + \Delta_i) \cap B) \times D_i$$

– измеримое подмножество $\Omega \times [0, T] \times C([0, T]; X)$.

Таким образом, $\tilde{F}$ – случайное мультиотображение.

С другой стороны, по определению $\tilde{F}(\omega, t, x) = F(\omega, t, x(t))$. Зафиксируем (ω, x). Тогда мультифункция $\tilde{F}_{\omega,x}(t) = \tilde{F}(\omega, \cdot, x)$ измерима по Лебегу и, более того, $\mathcal{P}(\omega, x) = \{f(t) \in \tilde{F}_{\omega,x}(t)\} = S^1_{\tilde{F}}$.

Возьмем теперь произвольную функцию $v \in L^1([0, T]; X)$. Воспользуемся Леммой 5 и получим следующую оценку:

$$dist_{L^1}(v, \mathcal{P}(\omega, x)) = dist_{L^1}(v, S^1_{\tilde{F}}) = \int_0^T d_X\left(v(t), \tilde{F}_{\omega,x}(t)\right) dt$$

$$= \int_0^T d_X\left(v(t), \tilde{F}(\omega, t, x)\right) dt$$

Полагая теперь $\tilde{v}(\omega, t, x) = v(t)$, в силу измеримости функции $\tilde{v}$, согласно Лемме 3 получаем, что функция

$$(\omega, t, x) \to d_X\left(\tilde{v}(\omega, t, x), \tilde{F}(\omega, t, x)\right) = d_X\left(v(t), \tilde{F}(\omega, t, x)\right)$$

измерима. Но тогда по теореме Фубини получаем, что функция

$$(\omega, x) \to \int_0^T d_X\left(v(t), \tilde{F}(\omega, t, x)\right) dt$$

измерима, откуда в силу Леммы 1 и вытекает доказываемое утверждение.

Данная теорема может быть использована при исследовании случайных дифференциальных включений (см., например, [2], [10], [13], [16]).

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-0640-2020-0009) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-51-15003 НЦНИ_а).

Конфликт интересов

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Библиографический список

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович [и др.]. М. : Либроком, 2011. 226 с.

2. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions // Topol. Meth. Nonl. Anal. 2012. Vol. 40, no. 2. P. 337–358.

3. Aumann R. J. Measurable utility and the measurable choice theorem // La Décision, 2: Agrégationet Dynamique des Ordres de Préférence (Actes Colloq. Internat., Aix-en-Provence, 1967), 1969. P. 15–26.

4. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin, Heidelberg. New York : Springer Verlag, 1977. 286 p.

5. Engl H. W. Random fixed point theorems for multivalued mappings // Pacific J. Math. 1978. Vol. 76. P. 351–360. DOI: 10.2140/pjm.1978.76.351

6. Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings // Second edition. Berlin, New York : Springer-Verlag, 2006. 539 p. DOI: 10.1007/1-4020-4666-9

7. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundamenta Math. 1975. Vol. 87, № 1. P. 53–72. DOI: 10.4064/fm-87-1-53-72

8. Hu S., Papageorgiou N. S. Handbook of Multivalued Analysis. Theory // Dordrecht: Springer, 1997. Vol. 1. 968 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-6359-4

9. Itoh S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl., 1979. Vol. 67. P. 261–273. DOI: 10.2140/pjm.1977.68.85

10. On periodic solutions of random differential inclusions / S. V. Kornev, Y.-C. Liou, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii // Applied Analysis and Optimization, 2017. Vol. 1, issue. 2. P. 245–258.

11. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions / S. V. Kornev, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2018. Vol. 19, № 3. P. 493–500.

12. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations // Journal of Dynamics and Differential Equations, 2019. V. 31, issue 2. P. 1017–1028. DOI: 10.1007/s10884-019-09734-5

13. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators // J. Differential Equat., 2020. Vol. 268. P. 5792–5810. DOI: 10.1016/j.jde.2019.11.021

14. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, Yu. Bezmelnitsyna, J.-C. Yao // Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2021. Vol. 22, № 1. P. 173–184.

15. Kuratowski K., Ryll-Nardzewskii C. A general theorem on selectors // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom. Phys., 1965. Vol. 13. P. 397–403.

16. Rybinski L. E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions // J. Math. Anal. Appl., 1989. Vol. 142. P. 53–61. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90163-7

17. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion // Comment. Math. Univ. Carolinae, 1996. Vol. 37. P. 725–748.

References

1. Borisovich Yu. G., Gelman B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* [Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions]. Moscow, Librokom Publ., 2011. 226 p.

2. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. *Topol. Meth. Nonl. Anal.*, 2012, no. 40, pp. 337–358.

3. Aumann R. J. Measurable utility and the measurable choice theorem. *La Décision, 2: Agrégationet Dynamique des Ordres de Préférence* (Actes Colloq. Internat., Aix-en-Provence, 1967), 1969, pp. 15–26.

4. Castaing C., Valadier M. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1977. 286 p.

5. Engl H. W. Random fixed point theorems for multivalued mappings. *Pacific J. Math.*, 1978, vol. 76, pp. 351–360. doi: 10.2140/pjm.1978.76.351

6. Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. *Second edition*. Berlin, New York, Springer-Verlag, 2006. 539 p. doi: 10.1007/1-4020-4666-9

7. Himmelberg C. J. Measurable relations. *Fundamenta Math.*, 1975. Vol. 87, no. 1, pp. 53–72. doi: 10.4064/fm-87-1-53-72

8. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of Multivalued Analysis. Theory. *Dordrecht, Springer*, 1997, vol. 1. 968 p. doi: 10.1007/978-1-4615-6359-4

9. Itoh S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1979, vol. 67, pp. 261–273. doi: 10.2140/pjm.1977.68.85

10. Kornev S. V., Liou Y.-C., Loi N. V., Obukhovskii V. V. On periodic solutions of random differential inclusions. *Applied Analysis and Optimization*, 2017, vol. 1, iss. 2, pp. 245–258.

11. Kornev S. V., Loi N. V., Obukhovskii V. V., Wen C.-F. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2018, vol. 19, no. 3, pp. 493–500.

12. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2019, vol. 31, iss. 2, pp. 1017–1028. doi: 10.1007/s10884-019-09734-5

13. Kornev S., Obukhovskii V., J.-C. Yao. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators. *J. Differential Equat.*, 2020, vol. 268, pp. 5792–5810. doi: 10.1016/j.jde.2019.11.021

14. Kornev S., Obukhovskii V., Bezmelnitsyna Yu., Yao J.-C. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 173–184.

15. Kuratowski K., Ryll-Nardzewskii C. A general theorem on selectors. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom. Phys.*, 1965, vol. 13, pp. 397–403.

16. Rybinski L. E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1989, vol. 142, pp. 53-61. doi: 10.1016/0022-247X(89)90163-7

17. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 1996, vol. 37, pp. 725–748.

Поступила в редакцию 09.08.2021
Подписана в печать 25.09.2021

ON SOME CLASSES OF MEASURABLE MULTIVALUED MAPPINGS

Valeri V. Obukhovskii[1], Ekaterina N. Getmanova[2], Sergey V. Kornev[3]

Voronezh State Pedagogical University[1, 2, 3]
Voronezh, Russia

[1]*Dr. Phys.-Math. Sci., Head of the Department of Higher Mathematics,*
tel.: (473) 255-36-63, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
[2]*Postgraduate student, Department of Higher Mathematics,*
tel.: (473) 255-36-63, e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
[3]*Dr. Phys.-Math. Sci., Professor of the Department of Higher Mathematics,*
tel.: (473) 255-36-63, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Abstract: The paper describes various properties of measurable and random multivalued mappings. The concept of a random coincidence point of single-valued and multivalued mappings is introduced and a theorem on its existence is proved. The measurability of the multivalued superposition operator generated by a random multivalued mapping is established.

Key words: σ-algebra, measurable space, measurable multivalued mapping, random fixed point, random coincidence point, multivalued superposition operator, random differential inclusion.

Cite as: Obukhovskii V.V., Getmanova E.N., Kornev S.V. On some classes of measurable multivalued mappings. *Izvestiya Voronezhskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* [Izvestia Voronezh State Pedagogical University], 2021, no. 3, pp. 181–186. (in Russian). DOI 10.47438/2309-7078_2021_3_181

Received 09.08.2021
Accepted 25.09.2021