

УДК 519.7

О СОЗДАНИИ ПРОЕКТА ДЛЯ КУРСОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ЦИКЛИЧЕСКОГО ГОРЕНИЯ

ОТРИШКО Татьяна Александровна,

ассистент кафедры информатики и методики преподавания математики
Воронежский государственный педагогический университет

АННОТАЦИЯ. В статье предлагается проект, отдельные части которого могут быть использованы в курсе компьютерного и математического моделирования. Рассмотрен один такт горения в аппарате пульсирующего горения, предложена его математическая модель и алгоритм расчетов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: проект, Навье-Стокс, давление, температура.

OTRISHKO T.A.,

Assistant of the Department of Computer Science and Mathematics Teaching Methods,
Voronezh State Pedagogical University

ON CREATING A PROJECT FOR COURSES OF SIMULATION BASED ON A CYCLIC COMBUSTION TASK

ABSTRACT. In the article a project is proposed, parts of which can be used in the course of computer and mathematical modelling. One combustion cycle in an intermittent burning device, its mathematical model and computation algorithm are described.

KEY WORDS: project, Navier-Stokes, pressure, temperature.

Математическое и компьютерное моделирование являются важными дисциплинами образовательного стандарта направления физико-математического образования. Класс задач, решаемых в этом курсе, требует постоянного расширения. Предлагаемые задачи должны соответствовать программе подготовки специалистов выбранного профиля. Они должны иметь серьезную научную и математическую базу, которая соотносится с уровнем знаний студентов старших и выпускных курсов.

С целью обновления изучаемой тематики заданий и расширения класса решаемых задач в данной статье будет предложен материал для курса моделирования. Он может быть использован на практических и лабораторных занятиях. Важно отметить, что материал будет интересен для студентов, так как имеет применение в инженерной практике и требует знания физических процессов.

С методической точки зрения целесообразно предложить данный материал студентам в качестве группового проекта с тем, чтобы каждый студент решал отдельную задачу.

I. Физическая постановка задачи

В рамках исследования будет рассмотрен аппарат пульсирующего горения.

Аппараты пульсирующего горения (АПГ) широко используются по целому ряду причин: экономия топлива, достаточно высокие экологические характеристики, создание ударной волны, обеспечивающей движение объекта и целый ряд других достоинств [1].

Особенность АПГ состоит в том, что горючая смесь подается не постоянно, а циклически. Циклическость связана с изменением давления, которое закрывает или открывает клапан поступления горючей смеси в зависимости от достигаемых значений.

В рассматриваемом нами случае камера сгорания представляет собой цилиндр с металлической стенкой. Длина цилиндра равна L , радиус – R_1 . Поступление топлива и кислорода происходит по всей плоскости левой стенки цилиндра. На этой же стенке находится источник пламени, благодаря которому происходит первичное возгорание газовой смеси. В результате возгорания наблюдается изменение температурного поля, сопровождающееся движением газовой смеси и повышением давления внутри цилиндра. Как только давление достигнет заданного значения, клапан поступления горючей смеси закроется, и будет происходить выгорание этой смеси. Фронт пламени при этом будет перемещаться. В процессе выгорания давление начнет падать и клапаны снова откроются. Описываемый процесс будет повторяться циклически. Требуется определить изменение температурного поля (T), изменение проекции скорости движения газовой смеси (U, V) на оси цилиндра OR и OZ (OR определена по радиусу цилиндра, OZ по его длине), изменение плотности (ρ) и давления (p) в газе в течение первого такта работы аппарата пульсирующего горения.

Расчет будем осуществлять до полного сгорания объема сжигаемого газа или до достижения определенного значения давления газа.

Проведем анализ полученных результатов.

Для того чтобы облегчить понимание и поиск решения поставленной задачи, необходимо разбить ее на подзадачи. Рассмотрим каждую из них.

II. Нахождение теплового поля при условии, что известны проекции скоростей. Уравнение для определения температуры имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{Nu}{Pr} l_{\text{деср}} \theta + \tilde{\rho} W(a, T)$$

Начальное значение температуры в газе:

$$\theta(r, z, 0) = \theta_0$$

Граничные условия значения температуры газа

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=\frac{R_1}{R_1}} = Nu(\theta_c - \theta_{c2});$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\frac{l}{R_1}} = 0.$$

где Pr – число Прандтля; Nu – число Нуссельта;

$l_{\text{деср}}$ – длина цилиндра в безразмерных координатах;

$\tilde{\rho}$ – плотность газовой смеси в безразмерных координатах;

$W(a, T)$ – функция скорости химической реакции, которая определяется по формуле Арениуса:

$$W(a, T) = k a^n \exp(-E/RT),$$

где k – кинетическая характеристика реакции;

a^n – концентрация реагирующих веществ;

E – энергия активации;

R – универсальная газовая постоянная;

T – температура.

Для расчетов температурных полей с помощью метода конечных разностей используем следующие процедуры:

– procedure nach_znach_temp_g(var T:mas); // температура в нулевой момент времени

<тело процедуры>

– procedure temper_g(i,j:integer;Pr_g:real;var T,T_next,U,V:mas);

III. Проекция скорости движения газа могут быть найдены с помощью системы Навье-Стокса [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\zeta}{\nu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\frac{\zeta}{\nu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \right.$$

где u – проекция вектора скорости на ось OR;

v – проекция вектора скорости на ось OZ, вдоль

которой лежит цилиндр;

τ – время;

p – давление;

ζ – объемный коэффициент вязкости;

ν – кинематическая вязкость.

Начальная проекция скорости движения газа:

$$u_r(r, z, 0) = u_0^r(r, z);$$

$$u_z(r, z, 0) = v_0^z(r, z),$$

Граничные условия для значений проекций скорости движения газа

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = b = const,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = c = const$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=\frac{R_1}{R_1}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial z} \right|_{z=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\frac{l}{R_1}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=\frac{R_1}{R_1}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\frac{l}{R_1}} = 0.$$

Используем следующую процедуру для нахождения решения системы Навье-Стокса:

– procedure nach_skor_dvizh_gaza(var U,V:mas);

<тело процедуры>

– procedure skor_g(var

U_next,V_next,U,V,P:mas);

<тело процедуры>

IV. Уравнение неразрывности для определения плотности газовой смеси имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = A \frac{\partial \rho}{\partial r}, \text{ где } A = -\frac{\rho c_{\text{см}2}}{\rho}$$

Начальное значение плотности газовой смеси:

$$\rho(r, z, 0) = \rho_0$$

Граничные условия для значений плотности газовой смеси:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r=\frac{R_1}{R_1}} = 0;$$

На заданной сетке функция $\rho(t)$ может быть найдена с помощью процедур:

– procedure nach_Ro_g(var Ro_g:mas);

<тело процедуры>

– procedure razriv_gaza(U,V,Ro_g:mas;var Ro_g_next:mas);

<тело процедуры>

V. Определение давления в газе осуществляется по уравнению Ван-дер-Ваальса состояния реального газа:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT,$$

где a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса, V_m – молярный объем газа, R – газовая постоянная.

Начальное значение давления в газовой смеси:

$$p(r, z, 0) = p_0$$

Граничное условие для давления газа:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=\frac{R_1}{R_1}} = 0.$$

Процедуру расчета давления можно оформить следующим образом:

– procedure davlenie(T,Ro_g:mas;var P:mas);

<тело процедуры>

VI. Процесс сгорания газа описывается следующим уравнением [3]:

$$\delta Q = F_r \delta v_r e^{-i\omega \Delta t} g_f \rho,$$

где δQ – скорость выделения тепла;

F_r – площадь поперечного сечения камеры сгорания;

δv_r – скорость подачи горючего, которая изменяется по гармонической функции

$$\delta v_r = |\delta v_r| e^{-i\omega t};$$

Δt – время после попадания в камеру частиц горючего и их сгорания;

i – мнимая единица;

ω – циклическая частота;

g_f – теплотворная способность топлива;

ρ – плотность горючей смеси.

Скорость тепловыделения прямо пропорциональна массовому расходу горючей смеси, пересекающей фронт пламени.

$$\delta Q = g_f m_f,$$

где m_f – периодическая составляющая массового расхода;

Функция распространения пламени $\delta Q(t)$ связана с функцией выгорания $\psi_m(t)$ соотношением:

$$\delta Q(t) = g_f \rho \delta m_f \psi_m(t).$$

Скорость тепловыделения и массовый расход горючей смеси можно найти, используя следующие процедуры:

```
- procedure skor_tep1(T,Ro_g:mas;var S:mas);
<тело процедуры>
- procedure mas_rashod(T, S:mas;var M:mas);
<тело процедуры>
```

VII. Работа над проектом.

Каждая задача может решаться изолированно при условии, что известно все, кроме основной искомой функции. Однако реальный интерес будет представлять система предлагаемых задач, в которой все неизвестные связаны между собой. В этом случае, используя метод конечной разности, на каждом временном шаге придется решать все задачи. Рассмотрим алгоритм при $t = \Delta t$ этих вычислений.

Подставим в уравнения начальные условия для температуры, скорости и давления.

Вычислим температуру во всех внутренних точках области.

1. Вычислим значения температуры на границах.
2. Найдем плотность газа на данный момент времени из уравнения неразрывности.
3. Вычислим давление в газе, для этого будем использовать уравнение состояния реального газа.
4. Вычислим скорость тепловыделения.
5. Вычислим проекции скорости (U , V) движения горючей смеси в газе.
6. Вычислим объем сгоревшего газа на данный момент времени.
7. Если давление в газе не достигло предельного значения, переходим к следующему шагу, т.е. $t = 2\Delta t$.

Рассмотренный в статье материал будет полезен на занятиях по математическому и компьютерному моделированию, изучаемому на старших курсах направления «Физико-математическое образование». Он расширит и углубит знания студентов, так как им потребуется использовать свои знания по нескольким дисциплинам, таким как физика, численные методы, программирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Быченко, В.И. Термогидроакустическая устойчивость автоколебательных процессов в аппаратах пульсирующего горения с аэродинамическим клапаном [Текст] / В.И. Быченко, Н.В. Мозговой // Вестник ТГТУ. – Т. 10. – № 4. – Тамбов, 2004. – С. 887–895.
2. Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва [Текст] / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. – М.: Наука, 1980.
3. Теория топочных процессов [Текст] / Г.Ф. Кнорре [и др.]; под ред. Г.Ф. Кнорре, И.И. Палеева. – М.; Ленинград: Энергия, 1966.